

Corrigé Exercice 1

$$1) \quad I_0 = \int_1^e x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \left(\frac{e^3 - 1}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad I_1 &= \int_1^e x^2 \ln(x) dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right)' \times \ln(x) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \times \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \ln'(x) dx \\ &= \frac{e^3}{3} \ln(e) - \frac{1^3}{3} \ln(1) - \frac{1}{3} \int_1^e x^3 \times \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - 0 - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} I_0 \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2e^3}{9} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \left(\frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad I_{n+1} &= \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right)' \times (\ln x)^{n+1} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \times (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \left((\ln x)^{n+1} \right)' dx \\ &= \frac{e^3}{3} \times 1^{n+1} - 0 - \frac{1}{3} \int_1^e x^3 \times (n+1) \times \ln'(x) \times (\ln x)^n dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} (n+1) \int_1^e x^3 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)^n dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx \end{aligned}$$

Par suite

$$3 I_{n+1} = e^3 - (n+1) I_n$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3} [e^3 - 2 I_1] \quad (n=1) \\ &= \frac{1}{3} \left[e^3 - \frac{4e^3}{9} - \frac{2}{9} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{5e^3}{9} - \frac{2}{9} \right] \\ &= \frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27} \end{aligned}$$

4) * Pour $x \in [1; e]$,

$$x^2 > 0 \text{ et } \ln(x) > 0; (\ln x)^n > 0$$

Puisque $x^2 \ln(x)^n > 0$ sur $[1; e]$, on a,

d'après le lemme de positivité des intégrales,

$$\int_1^e x^2 (\ln x)^n dx > 0$$

soit

$$\begin{aligned} 5) \quad I_n &> 0 \\ * \quad I_{n+1} - I_n &= \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx \\ &= \int_1^e \left(x^2 (\ln x)^{n+1} - x^2 (\ln x)^n \right) dx \\ &= \int_1^e x^2 (\ln x)^n (\ln(x) - 1) dx \end{aligned}$$

Pour $x \in [1; e]$, on a:

$$x^2 > 0, (\ln x)^n > 0;$$

$\ln(x) \leq \ln(e)$; $\ln(x) \leq 1$; $\ln(x) - 1 \leq 0$.
 Sachant $x^2 (\ln x)^n (\ln(x) - 1) \leq 0$ sur $[1; e]$,
 il résulte du lemme de positivité des intégrales

$$\int_1^e x^2 (\ln x)^n (\ln(x) - 1) dx \leq 0$$

Ainsi

$$I_{n+1} - I_n \leq 0;$$

$$I_{n+1} \leq I_n$$

6) La suite (I_n) étant décroissante minorée (par 0), elle est convergente

7) D'après 4a), $I_{n+1} > 0$; $3 I_{n+1} > 0$;
 soit avec 3) $e^3 - (n+1) I_n > 0$

ou encore

$$e^3 > (n+1) I_n;$$

$$\frac{e^3}{n+1} > I_n$$

8) Sachant $0 \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0$,
 il résulte du théorème de comparaison des limites que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

Corrigé Exercice 2

$$\underline{A.1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\ = \frac{1}{1} = 1, \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + \ln(1) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

A.6 Soit $x > 1$.

$$\text{Sachant } \left(\frac{1}{u(x)} \right)' = - \frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

$$\text{et } \left(\ln(u(x)) \right)' = \frac{u'(x)}{u(x)},$$

on obtient

$$f'(x) = - \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{\left(\frac{x}{x+1} \right)'}{\left(\frac{x}{x+1} \right)}$$

$$= - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \left(\frac{x}{x+1} \right)'$$

$$= - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{x}{x(x+1)^2} + \frac{x+1}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)^2}$$

A3. D'après A2), $\forall x \in [1; +\infty[\quad f'(x) > 0$

d'où :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\rightarrow 0$

d'où : $\forall x \in [1; +\infty[\quad f(x) < 0$

B.1.

$$n=3$$

$$u=0$$

$$i=1; u := u + \frac{1}{i} = 0 + \frac{1}{1} = 1;$$

$$i=2; u := u + \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$i=3; u := u + \frac{1}{i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

B.2.

Variables: i et n entiers naturels.

Entrée: u réel.
Demander à l'utilisateur n .

Initialisation: Affecter à u la valeur 0.

Traitement: Pour i variant de 1 à n
Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$

Traitement: Affecter à u la valeur
 $u - \ln(n)$.

Sortie: Afficher u

B.3. Conjecture: la suite (u_n) est décroissante et convergente vers α avec $\alpha \approx 0,57$.

C1.

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$
$$- 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n)$$

$n \geq 1$ d'où avec A3, $f(n) < 0$ et par suite

$$u_{n+1} - u_n < 0 ; \quad u_{n+1} < u_n.$$

la suite (u_n) est strictement décroissante.

Clé Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq x \leq k+1$, on a

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} ; \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geq 0.$$

Par suite, d'après le lemme de positivité des intégrales,

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$$

et par linéarité

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} [x]_k^{k+1}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \times 1$$

$$[\ln x]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k}$$

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

C2b D'après C2a

$$(k=1) \quad \ln(2) - \ln(1) \leq 1$$

$$(k=2) \quad \ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2}$$

$$(k=3) \quad \ln(4) - \ln(3) \leq \frac{1}{3}$$

$\vdots$

$$(k=n) \quad \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Par addition terme à terme et sachant $\ln(1)=0$,

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

C2c Avec C2b,

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \geq \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$u_n \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Sachant $\frac{n+1}{n} > 1$, on a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$ et
par suite $u_n > 0$.

C3. La suite (u_n) est décroissante (C1) et minorée
par 0 (C2c) donc la suite (u_n) est convergente.